數學傳播 49卷1期, pp. 96-106

$3x+1$ 猜想與 $x\pm 1$ 定理

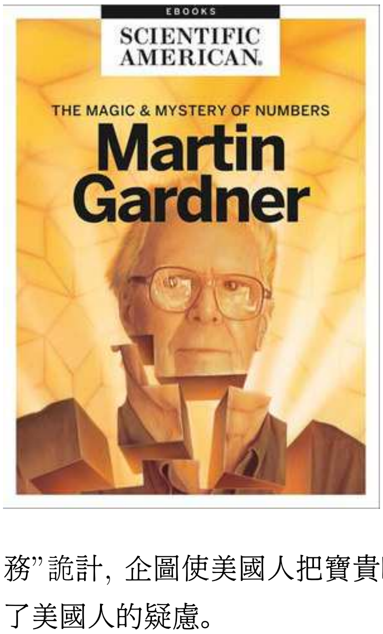
梁培基 · 梁 欽

摘要: 本文介紹了 $3x+1$ 問題的研究概況。給出了 $nx\pm k$ $(n,k=1,2,\ldots)$ 新方法: 把任意自然數 x 經過計算得到“1”的快速方法, 定義了“對偶解”及“全對偶解”。比傳統的 $3x+1$ 法簡單、快捷。

$3x+1$ 問題簡介

「曾有一個風靡世界的數字遊戲問題, 從小學生到大學生, 從平民到官員, 從歐洲到亞非拉, 人人都會做這個遊戲, 但要弄清它的道理卻非易事。這個問題已變成世界難題」[1]。

$3x+1$ 問題是 20 世紀提出來的猜想, 被列入數論四大猜想之一。這個問題有很多名字: 在 20 世紀 30 年代, 德國漢堡大學學生考拉茲 (Collatz) 就研究這個問題, 因此被稱為“考拉茲猜想”。又, 這個問題是在美國的雪城大學被研究的, 所以在西方被稱為雪城 (Syracuse) 猜想。也有人稱為“角谷猜想”, “烏拉姆問題”, “冰雹猜想”等等。



《科學美國人》雜誌“數學遊戲”專欄編輯馬丁·加德納 (Martin Gardner (1914年10月21日~2010年5月22日)), 撰寫了浩如煙海的數學科普文章, 據不完全統計已寫了五十本以上的科普讀物, 並多次獲獎, 在國際學術界影響之大無人能及。他在《科學美國人》雜誌介紹了這個猜想, 加速了這個猜想的傳播, 讓這個猜想風靡全球! 美國一位數學家說道:「曾經有一個時期, 在美國大學裡, 這個猜想成了最熱門的話題, 數學系和電腦系的大學生, 差不多人人都在研究。」

據傳, 當時幾乎有文化又感興趣的男女老幼, 紛紛被捲入“猜想”的旋渦之中, 對於這個猜想的討論熱烈到頂峰, 人人期盼攻克, 一夜成名。結果令美國中央情報局產生疑惑, 誤認為是蘇聯國家安全委員會 (KGB, 情報機關) 所使用的“特務”詭計, 企圖使美國人把寶貴時間陷入這個數字遊戲之中, 不務正業。直到蘇聯解體, 才消除了美國人的疑慮。

目前, 已經發表了很多關於 $3x+1$ 問題的文章, 對這個問題進行了多方面的探討, 可是這個問題的本身始終沒有被解決, 至今還是不知道, "到底是不是總會得到1"? [1]。

基本定義

任取一個自然數 x, 如果它是奇數, 就把它乘以 3 再加上 1; 如果是偶數, 就把它除以 2, 經過這樣的變換, 就得到一個新數。如果反復使用這種變換進行計算, 就會得到一串數, 直到得到 1 爲止。因此猜想, 經過有限次計算, 最後得到的結果爲 1。直到現在也沒有被證明, 所以仍爲猜想。

爲便於介紹, 我們約定:

定義1 (**初始數**) : 從第一個數"x"開始, 進行計算, 第一個數就叫"初始數"。

定義2: 從初始數開始進行計算, 每進行一次變換, 稱爲"1步"。直到 $x=1$, 所進行的變換次數, 稱爲"步數", 簡稱"步"。

定義3 (**對偶解**): 利用演算法 $3x+1$ 與 $3x-1$, 合併爲 $3x\pm1$ 模式。如果都能得到從初始數開始變換到 $x=1$。稱這兩組解互爲"對偶解"。如果只能得到 1 組解 ($3x+1$ 或者 $3x-1$), 而另一組出現"循環數", 則稱爲"非對偶解"。

定義4 (**全對偶解**): 若 $nx\pm k$ $(n,k=1,2,\ldots)$ 經過變換, 無論是 $nx+k$ 或是 $nx-k$ 都能得到 $x=1$, 稱爲"全對偶解"。

定義5 (**循環數**): 在計算 $3x\pm1$ 的一串數字中, 如果出現了相同的數字, 就叫"循環數"。

對於 $\boldsymbol{3x+1}$ 問題的探討

道德經曰:「天下難事, 必作於易; 天下大事, 必作於細」。

對於 $3x+1$ 問題, 既是難事, 又是大事。在《數學猜想與發現》(科學出版社) 一書中, 把 $3x+1$ 問題列入第一項, 著名的哥德巴赫猜想被列入第二項, 其重要性非同一般。

所以我們不妨對其認真、細緻的探討一番, 尋找 $3x+1$ 的奧秘到底隱藏在哪裡?

衆所周知, 把一個奇數"x"變成偶數有兩種方法: $x+1=$偶數, $x-1=$偶數。以本文爲例, 當 x 爲奇數時, 經過 $3x+1$ 計算, 就得到一個偶數。對 $3x-1$ 計算也應該得到一個偶數。

那麼問題來了:

問題1: 爲什麼在文獻中只出現 $3x+1$ 模式, 而不見 $3x-1$ 模式呢?

下面我們對幾個較小的奇數進行“$3x \pm 1$”模式的計算, 檢驗得到什麼結果?

當初始數 $x = 3$ 時, 表格中的數字表示每計算一步的變化情況, 例如 $3x + 1 = 10$, $10/2 = 5$, $5 \times 3 + 1 = 16$, $16/2 = 8$, $8/2 = 4$, $4/2 = 2$, $2/2 = 1$。爲方便計, 把 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 直接填入下邊表格中:

當 $x = 3$ 時, $3x + 1$ 的解										
3+	10	5	16	8	4	2	1			
當 $x = 3$ 時, $3x - 1$ 的解, 兩組互爲對偶解										
3−	8	4	2	1						

初始數後面的“+,−”符號, 表示對初始數及後面的奇數進行 $3x + 1$ 或者 $3x - 1$ 計算。下同。

當 $x = 5$、7、15 的例:

當 $x = 5$ 時, $3x + 1$ 的解										
5+	16	8	4	2	1					
當 $x = 5$ 時, $3x - 1$ 的解, 無對偶解										
5−	**14**	**7**	**20**	**10**	*5*	*14*	*7*	*20*	*10*	循環

當 $x = 7$ 時, $3x + 1$ 的解,																	
7+	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1	
當 $x = 7$ 時, $3x - 1$ 的解, 無對偶解																	
7−	**20**	**10**	**5**	**14**	*7*	*20*	*10*	*5*	*14*		循環						

當 $x = 15$ 時, $3x + 1$ 的解																		
15+	46	23	70	35	106	53	160	80	40	20	10	5	16	8	4	2	1	
當 $x = 15$ 時, $3x - 1$ 的解, 兩組互爲對偶解																		
15−	44	22	11	32	16	8	4	2	1									

我們發現:

1. 當對奇數實施 $3x + 1$ 模式計算時得到的結果, 最後 4 個數都是 8, 4, 2, 1。是 8/2/2/2 得到的結果, 好像直達列車一樣, 一氣呵成!
2. 當初始數爲 5 與 7 時, 對 5 與 7 實施 $3x - 1$ 模式的計算時, 最後邊 5 個數與前面相鄰 5 個數相同。當初始數等於 5 時, 粗體字 **5**, **14**, **7**, **20**, **10** 與斜體字 *5*, *14*, *7*, *20*, *10*。就

是循環數。當初始數等於 7 時的粗體字 **7**, **20**, **10**, **5**, **14** 與斜體字 *7*, *20*, *10*, *5*, *14* 也是循環數。

3. 當初始數 $x=3$ 及初始數 $x=15$ 時, 無論用 $3x+1$ 模式計算或者用 $3x-1$ 模式計算得到的結果都等於 8, 4, 2, 1。沒有循環數, 我們稱這兩組解爲“對偶解”。
4. 我們還發現 18 個數的循環數, 下面是初始數爲 17 時, 按照 $3x-1$ 模式運算, 得到的結果: 前面的 18 個粗體字 (**17**, **50**, **25**, ..., **136**, **68**, **34**) 與後面的 18 個斜體字 (*17*, *50*, *25*, ..., *136*, *68*, *34*.) 爲 18 個數的循環數。

當 $x=17$ 時, $3x+1$ 的解																				
17+	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1								
當 $x=17$ 時, $3x-1$ 的解, 下面出現 18 個數的循環數																				
17−	**50**	**25**	**74**	**37**	**110**	**55**	**164**	**82**	**41**	**122**	**61**	**182**	**91**	**272**	**136**	**68**	**34**	*17*	*50*	*25*
74	*37*	*110*	*55*	*164*	*82*	*41*	*122*	*61*	*182*	*91*	*272*	*136*	*68*	*34*						

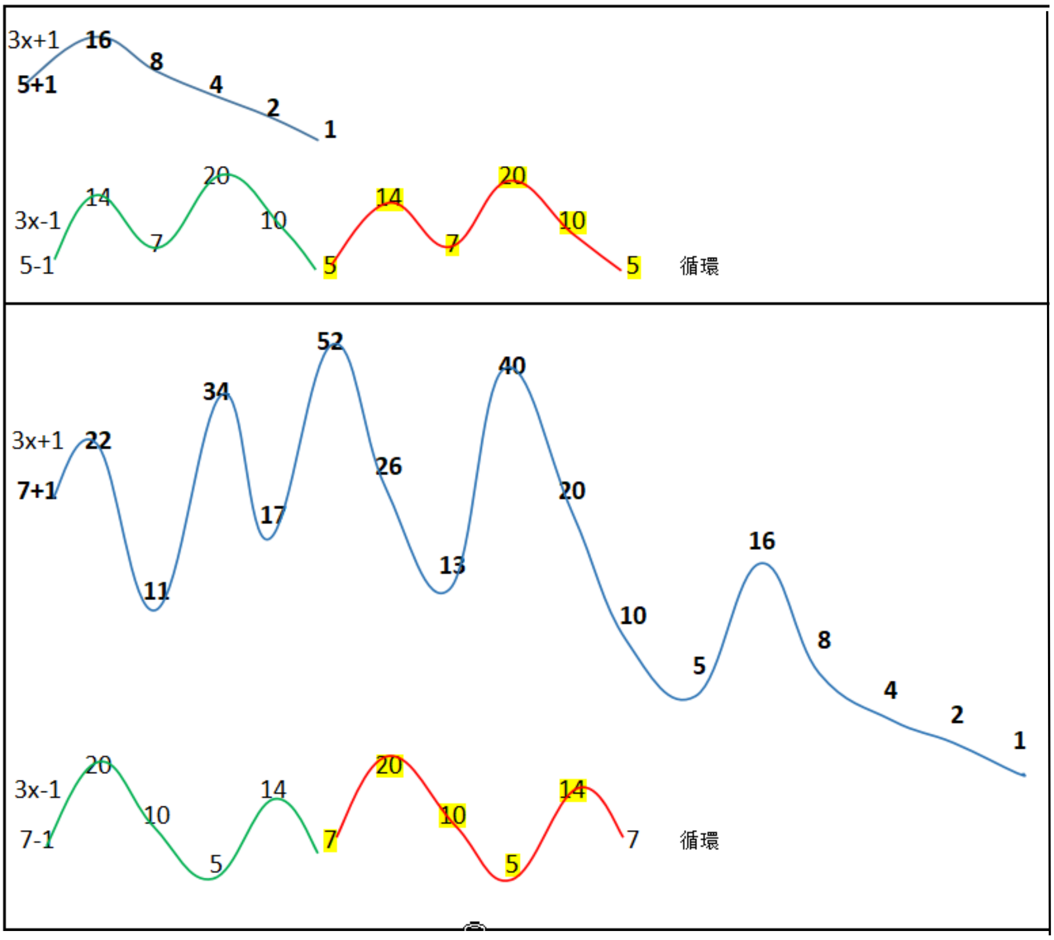
當初始數 $x=33$ 時, 用 $3x-1$ 模式計算, 得到 18 個循環數的例子

當 $x=33$ 時, $3x+1$ 的解																				
33+	100	50	25	76	38	19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10
5	16	8	4	2	1															
當 $x=33$ 時, $3x-1$ 的解, 下面是 18 個數的循環數, 粗體字與斜體字所示																				
33−	98	49	146	73	218	109	326	163	488	244	**122**	**61**	**182**	**91**	**272**	**136**	**68**	**34**	**17**	**50**
25	**74**	**37**	**110**	**55**	**164**	**82**	**41**	*122*	*61*	*182*	*91*	*272*	*136*	*68*	*34*	*17*	*50*	*25*	*74*	*37*
110	*55*	*164*	*82*	*41*																

由上例發現, 當對奇數進行 $3x-1$ 模式計算時, 得到的結果不一定全部都有對偶解, 所以對 $3x-1$ 的計算被棄之不用, 其中的道理不言而喻。

探討 $3x+1$ 模式得到 1 的解與 $3x-1$ 模式出現循環數的例。

下圖藍線與粗體字連接的數字, 表示用$3x+1$模式計算得到的從初始數到1的結果路線圖。綠線與紅線所連接的表示用 $3x-1$ 模式計算得到的從初始數及兩段循環數。



由以上 $3x-1$ 模式所示, 發現有循環數, 所以不能滿足 $3x\pm1$ 模式的"全對偶解"。

那麼問題又來了:

問題 2: 是否存在 $nx\pm k$ 模式滿足"全對偶解"的數組呢?

事實是最有力的證明:

方法一, 對於奇數實施 $x\pm1$ 計算, 對於偶數仍然除以 2, 可以得到等於 1 的結果。

下面是 $x=3,5,7$ 的例:

當 $x=3$ 時, $x+1$ 的解										
3+	4	2	1							
當 $x=3$ 時, $x-1$ 的解, 兩組互爲對偶解										
3−	2	1								

當 $x=5$ 時, $x+1$ 的解										
5+	6	3	4	2	1					
當 $x=5$ 時, $x-1$ 的解, 兩組互爲對偶解										
5−	4	2	1							

當 $x=7$ 時, $x+1$ 的解										
7+	8	4	2	1						
當 $x=7$ 時, $x-1$ 的解, 兩組互爲對偶解										
7−	6	3	2	1						

這裡我們給出初始數爲 53, 55, 57, 59, 61, 63 的例子:

當 $x=53$ 時, $x\pm1$ 的解											當 $x=55$ 時, $x\pm1$ 的解										
53+	54	27	28	14	7	8	4	2	1		55+	56	28	14	7	8	4	2	1		
53−	52	26	13	12	6	3	2	1			55−	54	27	26	13	12	6	3	2	1	
當 $x=57$ 時, $x\pm1$ 的解											當 $x=59$ 時, $x\pm1$ 的解										
57+	58	29	30	15	16	8	4	2	1		59+	60	30	15	16	8	4	2	1		
57−	56	28	14	7	6	3	2	1			59−	58	29	28	14	7	6	3	2	1	
當 $x=61$ 時, $x\pm1$ 的解											當 $x=63$ 時, $x\pm1$ 的解										
61+	62	31	30	15	16	8	4	2	1		63+	64	32	16	8	4	2	1			
61−	60	30	15	14	7	6	3	2	1		63−	62	31	30	15	14	7	6	3	2	1

我們發現當對於奇數用 $x\pm1$ 計算時, 都能得到對偶解。並且每個解的最後 4 個數分別是 3,4,2,1; 5,4,2,1; 6,3,2,1; 8,4,2,1.

綜上, 我們有

定理 1: 對於奇數實施 $x\pm1$ 計算, 對於偶數實施 $x/2$ 計算, 按照這個演算法繼續進行計算, 得到的數列沒有重複循環元素。最後可以得到 $2/2=1$。

證明: 用3個引理來證明:

引理 1: 先證明按照"$x+1$ 模式"計算的數列 $x_1, x_2, x_3, \ldots, 2, 1$, 中, 無循環數。

設: x_1 (奇數), x_2, x_3, $x_4, \ldots, 2, 1$ 爲"$x+1$ 模式"的元素數列 (表1), 由構作方法知, x_1 爲奇數時, 按照"$x+1$ 模式"計算, x_2 應爲 x_1+1。接著 x_3 應該是 $(x_1+1)/2$, 這時 x_3

比 x_2 小。相鄰兩數 x_1 與 x_2 (由奇數變偶數) 的差距爲 1, 由偶數變奇數 (或偶數) 時, x_2 是 x_3 的 2 倍, 它們相鄰兩個數的差是: 差 1, 是後邊數的 2 倍; 差 1, 是後邊數的 2 倍; 是後邊數的 2 倍, ..., 永遠不會相等, 所以不會出現重複循環數。引理 1 證畢。

引理 2: 對於“$x-1$ 模式”計算的數列, $x_1, x_2, x_3, \ldots, 2, 1,$ 中, 無循環元素。

由構作方法知, $x_2 = x_1 - 1$ (可知 $x_1 > x_2$)。接著 $x_3 = x_2/2$ (可知 $x_2 > x_3$)。

若 x_3 爲奇數則 $x_4 = x_3 - 1$; 若 x_3 爲偶數則 $x_4 = x_3/2$, 無論 x_3 爲奇、爲偶, 必有 $x_3 > x_4$。

若 x_4 爲奇數則 $x_5 = x_4 - 1$; 若 x_4 爲偶數則 $x_5 = x_4/2$, 無論 x_4 爲奇、爲偶, 必有 $x_4 > x_5$。

所以都不會出現相等元素的現象。當“$x-1$ 模式”時, 從 $x_1, x_2, \ldots,$ 至 4, 2, 1, 都是用大於符號 $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > \cdots > 4 > 2 > 1$ 連接起來的, 所以沒有相等的循環數。引理 2 證畢。

由引理 1 與引理 2, 證明對奇數實施 $x \pm 1$, 得到的數列無循環數。

引理 3: 當 $x/2$=奇數時, 我們可以用 $x \pm 1$ 的方法使其變爲 $x = 2^m$ $(m = 2, 3, \ldots)$ 的偶數。

當 $x = 2^m$ $(m = 2, 3, \ldots)$ 時, 最後的結果只能 $x/2/2, \ldots, 2/2 = 1$。

當 $x = 6$ 時, $6/2 = 3$, 用 $x - 1$ 模式, $3 - 1 = 2$, 再 $2/2 = 1$。引理 3 證畢。

由引理 1、2、3, 定理 1 證畢。

初始數爲 69 與 97 的兩個例子:

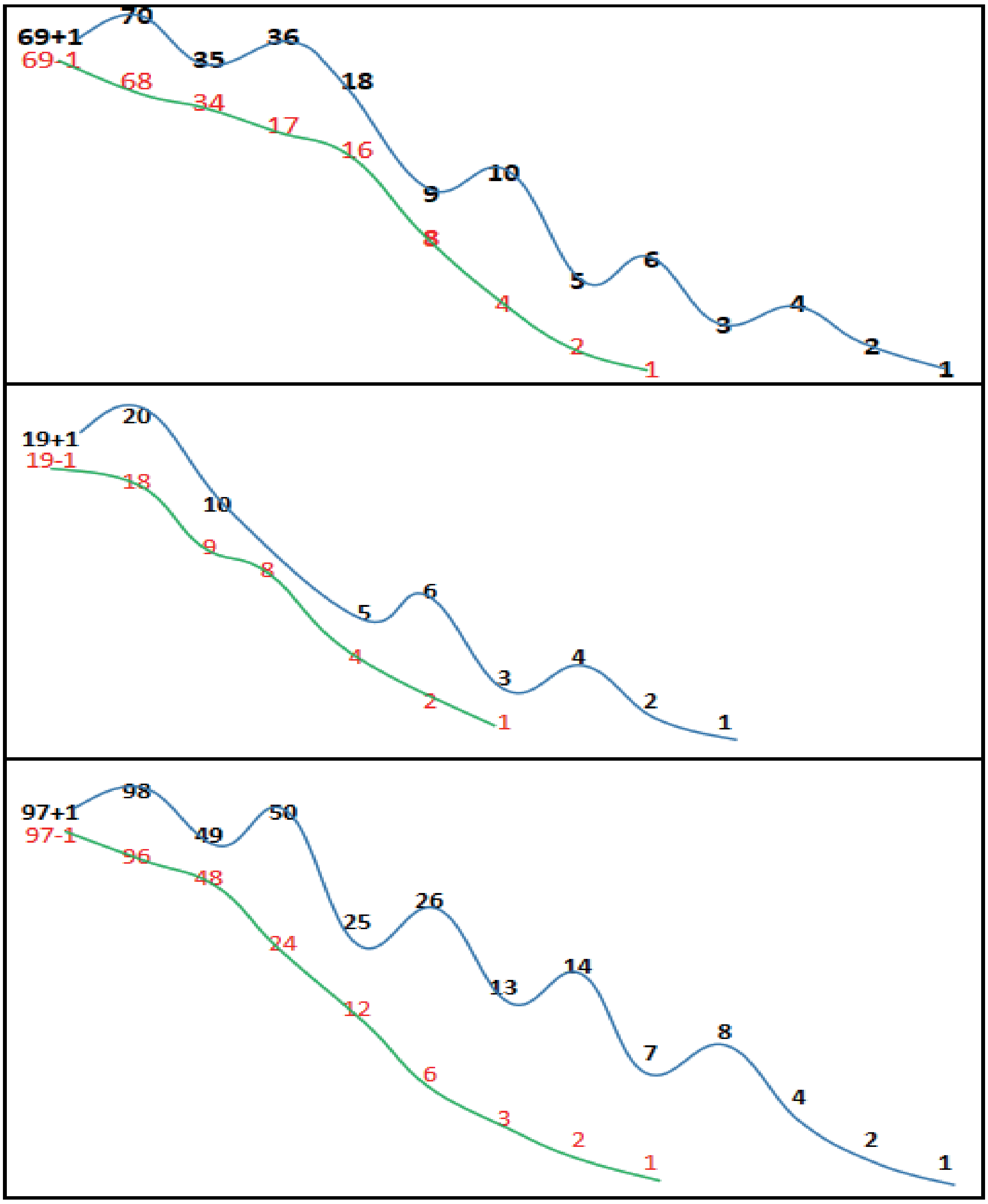
表 1

當 $x_1 = 69$ 時, $x \pm 1$ 模式的解												
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
69+	70	35	36	18	9	10	5	6	3	4	2	1
加1 /2 加1 /2 /2 加1 /2 加1 /2 加1 /2 /2												
69−	68	34	17	16	8	4	2	1				
減1 /2 /2 減1 /2 /2 /2 /2												

當 $x_1 = 97$ 時, $x \pm 1$ 模式的解												
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	
97+	98	49	50	25	26	13	14	7	8	4	2	1
97−	96	48	24	12	6	3	2	1				

圖解定理 1: $x\pm1$ 模式元素變化示意圖

下圖顯示了初始數分別爲 69, 19, 97 用 $x\pm1$ 模式計算的示意圖, 既不循環重複, 又不互相交叉, 各自走完從初始數到 1 的路程。藍色線 $(x+1)$、綠色線 $(x-1)$ 淸晰明瞭, 毫不混淆。



藍線連接的黑色粗體字, 表示 $x+1$ 模式的元素走向。
綠色線連接的紅色字, 表示 $x-1$ 模式的元素走向。不存在重複元素。

此路不通另闢蹊徑: 一個謎語指點迷津

整天除了吃飯、睡覺、就是想難題。整天胡思亂想, 想得不著邊際, 想起了“男”字, 凡是男人就應該到田地裡去出力, 天經地義呀, 不得違抗。再仔細想一想也不完全對, 還有“思”字呢? 在田地裡也要用“心”呢, 還要有思想。想得兩眼發直, 想得目瞪口呆, 想出一個“方”法 (‘方’爲萬點選一), 想到“精當”處, 自己對自己嘿嘿一聲傻笑, 沒人理會。只有搞幻方、搞文字、搞研究的“癡友”們才能體會其間的“樂趣”!

一天晚上, 孫子的同學小磊來找他玩耍, 平常我給他們出謎語讓他們猜, 這一次小磊跟別人學到一個謎語, 想難倒爺爺, 小磊主動出擊說: “爺爺我給你出個謎語。一半大, 一半小。猜一個字。” 我指著他的鼻子說: “是這個!”小磊說:“不對, 不對, 你猜錯啦!”小磊洋洋得意。我說:“一二三, 鼻、子、尖, 就是這個尖”。

之後, 我想起 $3x+1$, 能不能把3變大或者變小呢? 天下萬物有大就有小, 世界上很難找到兩個一樣大的樹葉。

我在想, 如果把3變小, 只有2與1, 當 $x=2$ 時, $2x+1=$ 奇數, 顯然不符合題意。那麼 $1x+1$ 呢? 即 $x+1$, 經過試驗竟然成功啦! 哈哈! 又做了很多例題, 無一不成功 — 笨貓逮住個瘸老鼠。

於是突發奇想, 何不用 $x-1$ 試試呢? 乘勝追擊, 一鼓作氣檢驗了幾十組也都成功! 哈哈哈! 小孩子的謎語竟然與數學難題搭配上了, 真是天作之合呀!

想當年搞幻方時, 也是孩子們背誦的乘法口訣, 一二得二, 使我茅塞頓開, 找到解決雙重幻方的關鍵環節, 構造出新的雙重幻方。看來我的老師是“童生”啊!

本文使用的 $x+1$ 法就是從構造幻方得到啟發的, 這一次, 小學生的謎語, 使我陡然醒悟。

一把鑰匙能開幾把鎖?

解決了 $x\pm1$ 的問題之後, 是否存在其他模式滿足全部對偶解的條件呢? 我們對下列問題

$$2x\pm2,\ 4x\pm4,\ 8x\pm8,\ 16x\pm16,\ 32x\pm32,\ 64x\pm64$$

進行了探討, 都得到正確的結果, 最後一個數爲“1”。下面給出 $2x\pm2$ 的 2 個例子:

$2x\pm2$ 全對偶解模式								
5+	12	6	3	8	4	2	1	
5−	8	4	2	1				
7+	16	8	4	2	1			
7−	12	6	3	8	4	2	1	

再給出 $4x\pm4$ 的 2 個例子

$4x\pm4$ 全對偶解模式									
3+	16	8	4	2	1				
3−	8	4	2	1					
5+	24	12	6	3	16	8	4	2	1
5−	16	8	4	2	1				

我們對$8x\pm8$、$16x\pm16$、$32x\pm32$、$64x\pm64$ 做了部分驗算 (從略), 都得到了正確的結果“1”。因此, 我們有

猜想 1: 存在 $2^m\pm2^m$ $(m=1,2,3,\ldots)$ 模式, 能得到正確的結果“1”。

我們又對初始數爲偶數時做了研究發現

猜想 2: 初始數爲偶數時, 經過運算也可以得到“1”。

分兩種情況討論:

情況 1: 當初始數爲 2^m 的偶數時, 可以直接除以 2, 一氣呵成而得到“1”。

4	2	1				
8	4	2	1			
16	8	4	2	1		
32	16	8	4	2	1	
64	32	16	8	4	2	1
$\vdots$						
2^m						

情況 2: 當初始數爲 $4k$ $(k=3,5,7,\ldots,2n+1)$ 時, 都能得到“1”。

12+	6	3	4	2	1					4×3
12−	6	3	2	1						
20+	10	5	6	3	4	2	1			4×5
20−	10	5	4	2	1					
28+	14	7	8	4	2	1				4×7
28−	14	7	6	3	2	1				
36+	18	9	10	5	6	3	4	2	1	4×9
36−	18	9	8	4	2	1				

反其道而行之, 尋找全循環數

假如我們討論的問題是: 對一個奇數實施 $nx \pm k$, 對於偶數仍然用除以2的規則, 使得它們得到的結果都有循環數。是否有解呢?

這樣, 我們就把前面的問題顛倒過來了, 反其道而行之:

猜想3: 是否存在 $x \pm k$ 模式的全循環數呢?

全循環就是無論 $x+k$ 還是 $x-k$, 經過計算, 都只能得到循環數。我們發現在 $12x \pm 12$ 及 $20x \pm 20$ 的全循環數的解如下:

$12x \pm 12$ 的全循環數																				
3+	**48**	**24**	**12**	**6**	*3*	*48*	*24*	*12*	*6*											
3−	**24**	**12**	**6**	*3*	*24*	*12*	*6*													
5+	72	36	18	9	120	60	30	15	192	96	**48**	**24**	**12**	**6**	**3**	*48*	*24*	*12*	*6*	*3*
5−	48	**24**	**12**	**6**	**3**	*24*	*12*	*6*	*3*											
7+	96	**48**	**24**	**12**	**6**	**3**	*48*	*24*	*12*	*6*	*3*									
7−	72	36	18	9	96	48	**24**	**12**	**6**	**3**	*24*	*12*	*6*	*3*						

$20x \pm 20$ 的全循環數																										
3+	**80**	**40**	**20**	**10**	**5**	**120**	**60**	**30**	**15**	**320**	**160**	80	40	20	10	5	120	60	30	15	320	160				
3−	**40**	**20**	**10**	**5**	**80**	40	20	10	5	80																
5+	**120**	**60**	**30**	**15**	**320**	**160**	**80**	**40**	**20**	**10**	5	120	60	30	15	320	160	80	40	20	10					
5−	**80**	**40**	**20**	**10**	5	80	40	21	10																	
7+	**160**	**80**	**40**	**20**	**10**	**5**	**120**	**60**	**30**	**15**	**320**	160	80	40	20	10	5	120	60	30	15	320				
7−	120	60	30	15	280	140	70	35	680	340	170	85	1680	840	420	210	105	2080	1040	520	260	130	65	1280	640	320
160	**80**	**40**	**20**	**10**	**5**	80	40	20	10	5																

結語: $3x+1$ 是一個有趣的大難題, 筆者不揣淺陋異想天開, 給出一個對於奇數實施 $x \pm 1$ 的算法, 對於偶數仍然用 $x/2$ 的算法, 得到了一些結果。請行家裡手不吝賜教。嚶其鳴矣, 求其友聲。

鳴謝! 感謝審稿老師的辛苦勞作, 提出很多中肯的建議和需要修改之處。

感謝編輯部主編及編輯老師, 一如既往重視鄙人的稿件, 本人共發表 13 篇小文, 其中有些問題幫助解決, 例如“反幻方定理”一文中, 主編親自添加了一個“推論”, 有些錯誤之處, 也及時修改。特致以誠摯的感謝!

參考文獻

1. 徐品方, 陳宗榮。《數學猜想與發現》。北京, 科學出版社, 2012。

—本文作者梁培基任職於中國君子故里梁培基數學工作室, 梁欽任職於中國北京在前線傳媒工作室—